Université de Relizane Ahmed Zabana 2023-2024

1^{er} **année ST Maths 01**

Fiche de TD 1

Exercice 1 : Soient p et q deux assertions
Montrer en utilisant la table de vérité que les propositions suivantes sont vraies

1· $p \Longleftrightarrow \overline{\overline{p}}$ 2· $\overline{(p \wedge q)} \Longleftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
3· $\overline{(p \vee q)} \Longleftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ 4· $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$.

Exercice 2 : -Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1· $\cos \frac{\pi}{2}$ est positif et $\ln e = 1$.
2· Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = \sin x$ ou $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.
3· $\sin(-\pi) = \sin \pi \Longrightarrow \ln \frac{1}{\pi} > 0$.
4· $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0$.
5· $\exists\, x \in \mathbb{N}, \quad x^2 \leq 0$.
6· $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x + y + 1 = 0$.
Trouver les négations de les propositions précédentes (à la maison).

Exercice 3 :
1)(Raisonnement direct) Soient x, y deux réels . Montrer que

$$xy^2 - yx^2 = y - x \Longrightarrow x = y \text{ ou } xy = 1$$

2)(Raisonnement par contraposition) Soient x, y deux réels. Montrer que

$$x \neq y \Longrightarrow (x-1)(y+1) \neq (x+1)(y-1)$$

3)(Raisonnement par contre-exemple)
3.1. Montrer que l'implication suivante est fausse

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}, \quad x < 9 \Longrightarrow x^2 < 81.$$

3.2. Est ce que $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2 + b^2} = a + b$?
4)(Raisonnement par récurrence) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k.$$

5)(Raisonnement par l'absurde)
5.1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \sqrt{1 + x^2} \neq 1 + \dfrac{x^2}{2}$
5.2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ Montrer que si $a = b \Longrightarrow \dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$.

Université de Relizane Ahmed Zabana 2023-2024

1^{er} **année ST Maths 01**

Fiche de TD 2

Exercice 1 : Soit E un ensemble
Montrer que pour toutes parties A, B de E

1· $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$
2· $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$
3· $\complement_E \left(\complement_E A\right) = A$
4· $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

Exercice 2 : A, B et C trois sous-ensembles de ensemble E . Montrer que
1· $A \cup B = A \cap B \Longrightarrow A = B$
2· $A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$
3· $B \subset C \Longrightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$
4· $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longleftrightarrow [(A \cup B) \subset C]$

Exercice 3 : **I**· Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{R}$ une relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = \alpha\left(x^2 - y^2\right)$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.
2. On pose $\alpha = 7$, déterminer la classe d'équivalence de 6 .

II· Soit Φ la Relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $a\Phi b \Longleftrightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = b$
- Montrer que Φ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$. -L'ordre il est total ?

Exercice 4 (à la maison) : Soit $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - 2x^2$

$\star$Déterminer l'image directe de $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ par l'application f
$\star$Déterminer l'image réciproque de $[-1, 1]$ par l'application f.

Exercice 5 : Soit $f\ : \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2 - \dfrac{8 - x}{4x + 6}$

$\star$ f est-elle injective ? surjective ? justifier.
$\star$ Quelle restriction doit-on faire sur lensemble darrivée pour que f devienne une bijection ? Dans ce cas donner l'application réciproque de f.

Université de Relizane Ahmed Zabana 2023-2024

1^{er} **année ST Maths 01**

Fiche de TD 3

Exercice 1 :

$\star$ Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{3x - x^3},\ g(x) = \ln(x-2) + \ln(x+2),\ h(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}.$$

$*$ En utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow 2}(3x+1) = 7$.

Exercice 2 (à la maison):

Étudier les limites quand x tend vers $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \ln x$$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

$*$ Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$ $\quad$ $*$ f est-elle continue en 0 ? est-elle dérivable en 0 ? justifier.

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x} & si\ x > 0, \\ 0 & si\ x = 0, \\ x^3 \sin \frac{1}{x} & si\ x < 0. \end{cases}$

$\star$ f est-elle continue en $x = 0$?

$\star$ Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$. En déduire l'équation de la droite tangente à f en $x = \frac{1}{\pi}$.

$\star$ f est-elle dérivable en $x = 0$? $\quad$ $\star$ f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$?

Exercice 5 :

$\star$Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$\text{a) } f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ \text{b) } f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right),\ \text{c) } f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}.$$

$\star$ Calculer en utilisant la règle de l'hôpital les limites suivantes:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x},\ \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1},\ \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$$

Université de Relizane Ahmed Zabana 2023-2024

1^{er} **année ST Maths 01**

Fiche de TD 4

Exercice 1 :
1) Résoudre l'équation $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$ pour $0 \leq x \leq 2\pi$

2) Montrer que l'équation $2\cos^2 x + 7\sin x = 5$ peut s'écrire sous forme d'une équation du seconde degré en $\sin x$.

3) Résoudre cette équation pour $0 \leq x \leq \pi$.

Exercice 2 : Calculer les nombres suivants :

$a)$ $\arcsin\left(\sin \dfrac{18\pi}{5}\right)$ $b)$ $\arccos\left(\sin \dfrac{18\pi}{5}\right)$ $c)$ $\arcsin\left(\sin \dfrac{15\pi}{7}\right)$ $d)$ $\sin\left(\arcsin \dfrac{1}{3}\right)$ $e)$ $\tan\left(\arctan \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 3 : 1) Montrer que $\forall\, x \in [-1, 1]$ on a :

$a)$ $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad$ $b)$ $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$

$c)$ $\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$ $\quad$ $d)$ $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

2) Simplifier les expressions suivantes :

$a)$ $\cos(2\arccos x)$ $\quad$ $b)$ $\cos(2\arcsin x)$ $\quad$ $c)$ $\sin(2\arccos x)$

3) Montrer que $\quad \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & si\ x > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & si\ x < 0 \end{cases}$

Exercice 4 : $*$ Résoudre les équations suivantes :

$a)$ $\arcsin x = \arcsin \dfrac{4}{5} + \arcsin \dfrac{5}{13}$ $\quad$ $b)$ $(\arcsin x - 5)\arcsin x = -4$ $\quad$ $c)$ $5\cosh x - 4\sinh x = 3$.
$*$Calculer les limites suivantes :

$a)$ $2\cosh^2 x - \sinh 2x \ \ (x \to +\infty)$ $\qquad$ $b)$ $e^{2x}\left(2\cosh^2 x - \sinh 2x\right) \ \ (x \to -\infty)$.

$*$Etudier le domaine de définition de la fonction f définie par: $f(x) = \text{argch}\left[\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\right]$

et simplifier son expression lorsqu'elle a un sens.

Université de Relizane Ahmed Zabana 2023-2024

1^{er} **année ST Maths 01**

Fiche de TD 5

Exercice 1 : Calculer les DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes

1) $\dfrac{1}{1+x-x^2}$ 2) $\dfrac{e^x}{e^x-1}$ 3) $\dfrac{1}{\cos x}$

4) $\tan x$ 5) $\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\cos x}$

Exercice 2 : Déterminer le DL en 0 à l'ordre n des fonctions suivantes

1) $\cos x\sqrt{1+x}$ $n=2$

2) $\dfrac{e^x}{(1+x)^3}$ $n=2$

3) $\dfrac{\cosh x \ln(1+x)}{\cos x}$ $n=3$.

Exercice 3 : Calculer les DL suivantes :

1) $\sqrt{x}$ au point 2 à l'ordre 3

2) $\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$ en 1 à l'ordre 2

3) $\sin x$ au point $\dfrac{\pi}{3}$ à l'ordre 3

4) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3

5) $e^{-\frac{2}{x}}$ en $-\infty$ à l'ordre 3

Exercice 4 : Calculer les limites suivantes :

$a)$ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$

$b)$ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{\cos x-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$

$c)$ $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$

$d)$ $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \left(1+\frac{7}{x}\right)^x$

Fiche de TD 1

Solution de L'exercice 1:

I) En utilisant la table de vérité

p	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$p \Longleftrightarrow \overline{\overline{p}}$
V	F	V	V
F	V	F	V

De la même manière, on prouve (2) et (3) :

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$(\overline{p \wedge q}) \Longleftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$(\overline{p \vee q}) \Longleftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

on prouve (4) comme suit:
La définition mathématique est la suivante : L'assertion $(\overline{p} \vee q)$ est notée $(p \Longrightarrow q)$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Longrightarrow q$	$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$	$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Solution de L'exercice 2:

1· $\cos\frac{\pi}{2}$ est positif et $\ln e = 1$ est une assertion vraie car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ et $\ln e = 1$

$$[(V \wedge V) \Longleftrightarrow V]$$

2· Pour tout $x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = \sin x$ ou $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ est une assertion vraie car $\sin(-x) = -\sin x$ fonction impaire (Pour tout $x \in \mathbb{R}\ \ \sin(-x) = \sin x$ fausse, la fonction sin est impaire), $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ est toujours vraie pour $x \in \mathbb{R}$

$$[(F \vee V) \Longleftrightarrow V]$$

3· $\sin(-\pi) = \sin\pi \Longrightarrow \ln\left(\frac{1}{\pi}\right) > 0$ est une assertion fausse car $(\sin(-\pi) = \sin\pi = 0)$ est vraie par contre $\ln\left(\frac{1}{\pi}\right)$ est négative

$$[(V \Longrightarrow F) \Longleftrightarrow F]$$

4· $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0$ est une assertion fausse car $\exists\, x = 0,\, x^2 = 0^2 = 0 > 0$ est fausse
5· $\exists\, x \in \mathbb{N}, \quad x^2 \leq 0$ est une assertion vraie car $\exists\, x = 0,\, x^2 = 0^2 = 0 \leq 0$
6· $\forall\, x \in \mathbb{R},\, \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x + y + 1 = 0$ est une assertion vraie
pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut prendre $y = -x - 1$ (existe) . On a $x + y + 1 = x - x - 1 + 1 = 0$

Solution de L'exercice 3:

1)Raisonnement direct

Soient $x, y \in \mathbb{R}$
On suppose $xy^2 - yx^2 = y - x$ et on montre $x = y$ ou $xy = 1$.

$$\begin{aligned} xy^2 - yx^2 = y - x &\Longrightarrow xy^2 - yx^2 - y + x = 0 \\ &\Longrightarrow xy(y - x) - y + x = 0 \\ &\Longrightarrow xy(y - x) - (y - x) = 0 \\ &\Longrightarrow (y - x)(xy - 1) = 0 \\ &\Longrightarrow y - x = 0 \ ou\ xy - 1 = 0 \\ &\Longrightarrow x = y \ ou\ xy = 1 \end{aligned}$$

Donc $xy^2 - yx^2 = y - x \Longrightarrow x = y\ ou\ xy = 1$
2) Raisonnement par contraposition
Soient $x, y \in \mathbb{R}$
Le raisonnement par contraposition est basé sur léquivalence suivante. $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Longrightarrow \bar{p})$
Alors : $[x \neq y \Longrightarrow (x-1)(y+1) \neq (x+1)(y-1)] \Leftrightarrow [(x-1)(y+1) = (x+1)(y-1) \Longrightarrow x = y]$

On suppose $(x-1)(y+1)=(x+1)(y-1)$ et on montre $x=y$.

$$\begin{aligned}(x-1)(y+1)=(x+1)(y-1) &\Longrightarrow xy+x-y-1=xy-x+y-1\\ &\Longrightarrow x-y=-x+y\\ &\Longrightarrow 2x=2y\\ &\Longrightarrow x=y\end{aligned}$$

Donc $x \neq y \Longrightarrow (x-1)(y+1) \neq (x+1)(y-1)$

3) Raisonnement par contre-exemple

3.1. Montrons que l'implication est fausse

Si $x=-10 \in \mathbb{Z}$

$$-10<9 \Longrightarrow 100<81 \text{ est une proposition fausse}$$

car

$$(V \Longrightarrow F) \Longleftrightarrow F$$

3.2. $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2+b^2}=a+b$ est fausse car.

Sa négation $\exists\, a, b \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$ est vraie

$\exists\, a=3$ et $b=4$

$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5 \neq 3+4.$

4) Raisonnement par récurrence

Montrons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N}: 3 \times 5^{2n-1}+2^{3n-2}=17k$$

On raisonne par récurrence. Pour $n=1$, On a

$$3 \times 5^{2-1}+2^{3-2}=17=17 \times 1$$

Donc

$$\exists k=1 \in \mathbb{N}: 3 \times 5^{2-1}+2^{3-2}=17k$$

On suppose que

$$\exists k \in \mathbb{N}: 3 \times 5^{2n-1}+2^{3n-2}=17k$$

et montrons que

$$\exists k' \in \mathbb{N}: 3 \times 5^{2n+1}+2^{3n+1}=17k'$$

On a

$$\begin{aligned}3 \times 5^{2n+1}+2^{3n+1} &= 3 \times 25 \times 5^{2n-1}+2^{3n-2} \times 8\\ &= 8\left(3 \times 5^{2n-1}+2^{3n-2}\right)+17 \times 3 \times 5^{2n-1}\\ &= 8 \times 17k+17 \times k''\\ &= 17k' \text{ avec } k'=(8k+k'')\end{aligned}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 .

5) Raisonnement par l'absurde

Soit R une assertion on suppose que R est fausse ($\bar{R}$ est vraie) et on cherche une contradiction. c'est a dire R est vraie.

5.1. Montons que $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \sqrt{1+x^2} \neq 1 + \dfrac{x^2}{2}$

On suppose $\exists x \in \mathbb{R}^* \quad \sqrt{1+x^2} = 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} &\Longleftrightarrow \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 = \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2 \\
&\Longleftrightarrow 1 + x^2 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{4} \\
&\Longleftrightarrow x^4 = 0 \\
&\Longleftrightarrow x = 0 \quad \textit{contradiction}
\end{aligned}$$

5.2 On sait que ($\bar{p}$ *ou* q) est appelée implication logique et on la note $p \Longrightarrow q$ donc la négation de $p \Longrightarrow q$ elle est (p *et* $\bar{q}$).

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $a = b$ et $\dfrac{a}{1+b} \neq \dfrac{b}{1+a}$

$$\begin{aligned}
&donc\ a = b\ et\ a(1+a) \neq b(1+b) \\
&donc\ a = b\ et\ a - b + a^2 - b^2 \neq 0 \\
&donc\ a = b\ et\ (a-b)(1+a+b) \neq 0
\end{aligned}$$

est une contradiction car $a = b \Longrightarrow (a-b) = 0 \Longrightarrow (a-b)(1+a+b) = 0$.

Conclusion : Si $a = b$ alors $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$

Fiche de TD 2

Solution de L'exercice 1:

$$\begin{aligned} 1\cdot\ \ Soit\ x \in \complement_E (A\cup B) &\Longleftrightarrow x \notin (A\cup B) \Longleftrightarrow \overline{x \in (A\cup B)} \\ &\Longleftrightarrow \overline{x \in A\ ou\ x \in B} \\ &\Longleftrightarrow x \notin A\ et\ x \notin B \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E A\ et\ x \in \complement_E B \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E A \cap \complement_E B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cdot\ \ Soit\ x \in \complement_E (A\cap B) &\Longleftrightarrow x \notin (A\cap B) \Longleftrightarrow \overline{x \in (A\cap B)} \\ &\Longleftrightarrow \overline{x \in A\ et\ x \in B} \\ &\Longleftrightarrow x \notin A\ ou\ x \notin B \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E A\ ou\ x \in \complement_E B \\ &\Longleftrightarrow x \in \complement_E A \cup \complement_E B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\cdot\ \ Soit\ x \in \complement_E \left(\complement_E A\right) &\Longleftrightarrow x \notin \complement_E A \\ &\Longleftrightarrow x \in A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\cdot\ \ Soit\ x \in A \setminus B &\Longleftrightarrow x \in A\ et\ x \notin B \Longleftrightarrow x \in A\ et\ x \in \complement_E B \\ &\Longleftrightarrow x \in \left(A \cap \complement_E B\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in \left(A \cap \complement_E B\right) \cup \varnothing \\ &\Longleftrightarrow x \in \left(A \cap \complement_E B\right) \cup \left(B \cap \complement_E B\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in (A\cup B) \cap \complement_E B \\ &\Longleftrightarrow x \in (A\cup B) \setminus B. \end{aligned}$$

Solution de L'exercice 2:

- $A\cup B = A\cap B \Rightarrow A = B$?

Hypothèse : $A\cup B = A\cap B$

But: $A = B$

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A\cup B \\ &\Rightarrow x \in A\cap B \quad \text{car } \mathrm{A\cup B = A\cap B} \\ &\Rightarrow x \in B, \text{ ceci implique que } A \subset B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in B &\Rightarrow x \in A\cup B \\ &\Rightarrow x \in A\cap B \quad \text{car } A\cup B = A\cap B \\ &\Rightarrow x \in A, \text{ ceci implique que } B \subset A \end{aligned}$$

Donc $A \cup B = A \cap B \Longrightarrow A = B$.
$\bullet A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A \quad ?$
Hypothèse : $A \subset B$
But: $\complement_E B \subset \complement_E A$

$$\begin{aligned} x \in \complement_E B &\Rightarrow x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \,\text{car}\, A \subset B \\ &\Rightarrow x \in \complement_E A \end{aligned}$$

Donc $A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$.

$\bullet$ $B \subset C \Longrightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$?

Hypothèse : $B \subset C$
But : $(A \cap B) \subset (A \cap C)$
$\forall\, x \in (A \cap B) \Longrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B$

$$\begin{aligned} \textit{Comme } B \subset C &\Longrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in C \\ &\Longrightarrow x \in (A \cap C) \end{aligned}$$

Donc : $B \subset C \Longrightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$.
$\bullet$ $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longleftrightarrow [(A \cup B) \subset C]$?

a. $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longrightarrow [(A \cup B) \subset C]$?

Hypothèse : $(A \subset C) \wedge (B \subset C)$
But : $(A \cup B) \subset C$
$\forall\, x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B$

$$\begin{aligned} \textit{Comme } (A \subset C) \wedge (B \subset C) &\Longrightarrow x \in C \vee x \in C \\ &\Longrightarrow x \in C \end{aligned}$$

Donc : $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longrightarrow [(A \cup B) \subset C]$

b. $[(A \cup B) \subset C] \Longrightarrow [(A \subset C) \wedge (B \subset C)]$?

Hypothèse : $(A \cup B) \subset C$
But : $(A \subset C) \wedge (B \subset C)$
$\forall\, x \in A \Longrightarrow x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in C$, ceci implique que $A \subset C$
$\forall\, x \in B \Longrightarrow x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in C$, ceci implique que $B \subset C$
Donc : $[(A \cup B) \subset C] \Longrightarrow [(A \subset C) \wedge (B \subset C)]$
Conclusion :
$[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longleftrightarrow [(A \cup B) \subset C]$

Solution de L'exercice 3:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = \alpha\left(x^2 - y^2\right)$$

• $\mathcal{R}$ est Réflexive $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}x \quad ?$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ on a

$$x^3 - x^3 = \alpha\left(x^2 - x^2\right) \Rightarrow x\mathcal{R}x$$

Alors $\mathcal{R}$ est Réflexive

• $\mathcal{R}$ est symétrique $\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$?

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow x^3 - y^3 = \alpha\left(x^2 - y^2\right) \\ &\Leftrightarrow y^3 - x^3 = \alpha\left(y^2 - x^2\right) \\ &\Rightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{R}$ est symétrique.

• $\mathcal{R}$ est Transitive $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x\mathcal{R}y)$ et $(y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$?

c) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $\left\{\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \\ et \\ y\mathcal{R}z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3 - y^3 = \alpha\left(x^2 - y^2\right) \\ y^3 - z^3 = \alpha\left(y^2 - z^2\right) \end{array}\right. \Rightarrow x^3 - z^3 = \alpha\left(x^2 - z^2\right)$

$\Rightarrow x\mathcal{R}z$ Ainsi $\mathcal{R}$ est transitive.

Conclusion : $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}$.

2. la classe d'équivalence de 6

$$\begin{aligned} \dot{6} &= \{x \in \mathbb{R} : x\mathcal{R}6\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - 6^3 = 7\left(x^2 - 6^2\right)\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - 7x^2 + 36 = 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : (x - 6)\left(x^2 - x - 6\right) = 0\right\} \\ &= \{6, 3, -2\} \end{aligned}$$

II $a\Phi b \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = b$

(1) Montrer que Φ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$

a) Φ est-elle réflexive ?

Φ est réflexive $\Longleftrightarrow \forall\, a \in \mathbb{N}^*,\ a\Phi a$?

$\forall\, a \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow \exists\, n = 1 \in \mathbb{N}$ tel que : $a^1 = a \Longrightarrow a\Phi a \Longrightarrow \Phi$ est réflexive

b) Φ est-elle antisymétrique ?

Φ est antisymétrique $\Longleftrightarrow \forall\, a, b \in \mathbb{N}^*, \qquad a\Phi b\ et\ b\Phi a \Longrightarrow a = b$?

$$\begin{aligned} soient\ a, b \in \mathbb{N}^*, \quad si\ a\Phi b\ et\ b\Phi a &\Longrightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ tel\, que\ :\ a^{n_1} = b \\ et\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N}\ tel\, que\ :\ b^{n_2} = a &\Longrightarrow \left(b^{n_2}\right)^{n_1} = a^{n_1} = b \\ &\Longrightarrow n_1 n_2 = 1 \Longrightarrow n_1 = n_2 = 1 \\ &\Longrightarrow a = b \Longrightarrow \Phi\ est\ antisymtrique. \end{aligned}$$

c) Φ est-elle transitive?
Φ est transitive $\Longleftrightarrow \forall\, a,b,c \in \mathbb{N}^*,\ a\Phi b\ et\ b\Phi c \Longrightarrow a\Phi c$

$$\begin{aligned}
&soient\ a,b,c \in \mathbb{N}^*,\\
&a\Phi b\ et\ b\Phi c \Longrightarrow \exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ a^{n_1} = b\\
&et\ \exists\, n_2 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ b^{n_2} = c \Longrightarrow (a^{n_1})^{n_2} = c\\
&\exists\, n = n_1 n_2 \in \mathbb{N}\ tel\,que\ :\ a^n = c\\
&\Longrightarrow a\Phi c\\
&\Longrightarrow \Phi\ est\ transitive
\end{aligned}$$

(2) Cet ordre est-il total ?
L'ordre n'est pas total car pour les deux entiers $\{2,3\}$ on a ni $2\Phi 3$ ni $3\Phi 2$.

Solution de L'exercice 5:
f est injective$\Longleftrightarrow \forall\, x_1,\ x_2 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\},\ \ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$?

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 2 - \frac{8-x_1}{4x_1+6} = 2 - \frac{8-x_2}{4x_2+6}\\
&\Rightarrow \frac{8-x_1}{4x_1+6} = \frac{8-x_2}{4x_2+6}\\
&\Rightarrow (8-x_1)(4x_2+6) = (8-x_2)(4x_1+6)\\
&\Rightarrow 32x_2 + 48 - 4x_1x_2 - 6x_1 = 32x_1 + 48 - 4x_1x_2 - 6x_2\\
&\Rightarrow 32x_1 + 6x_1 = 32x_2 + 6x_2\\
&\Rightarrow 38x_1 = 38x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ donc } f \text{ est injective.}
\end{aligned}$$

f est surjective$\Longleftrightarrow \forall\, y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\},\ y = f(x).$
Soit $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
y = f(x) &\Rightarrow y = 2 - \frac{8-x}{4x+6} \Rightarrow y - 2 = -\frac{8-x}{4x+6}\\
&\Rightarrow 8 - x = (2-y)(4x+6) \Rightarrow 8 - x = 8x + 12 - 4xy - 6y\\
&\Rightarrow 8 - 9x + 4xy = 12 - 6y\\
&\Rightarrow 4xy - 9x = 4 - 6y\\
&\Rightarrow x = \frac{4-6y}{4y-9} \quad , \quad \text{si } 4y - 9 \neq 0\\
&y = \frac{9}{4} \text{ n'a pas d'antécédent, alors } f \text{ n'est pas surjective.}
\end{aligned}$$

$$x = \frac{4-6y}{4y-9} \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \text{ car } \frac{4-6y}{4y-9} = -\frac{3}{2} \Longleftrightarrow 27 = 8 \text{ ce qui est impossible.}$$

- Pour f soit bijective il faut que l'ensemble d'arrivée soit $\mathbb{R} - \left\{\frac{9}{4}\right\}$
- L'application réciproque de f est :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{\tfrac{9}{4}\right\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{3}{2}\right\} \\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{4-6x}{4x-9} \end{aligned}$$

Fiche de TD 3

Solution de L'exercice 1:

1) f est définie si, et seulement si,

$$\begin{aligned} 3x - x^3 \geq 0 &\Longleftrightarrow x(3-x^2) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[0, \sqrt{3}\right], \end{aligned}$$

donc

$$D_f = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[0, \sqrt{3}\right].$$

2) g est définie si, et seulement si,

$$x - 2 > 0 \text{ } et \text{ } x + 2 > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ \ et \\ \ \ x > -2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow x > 2,$$

donc

$$D_g =]2, +\infty[.$$

3) h est définie si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \frac{2+3x}{5-2x} \geq 0 \text{ } et \text{ } 5-2x \neq 0 &\Longleftrightarrow (2+3x \geq 0 \text{ } et \text{ } 5-2x > 0) \text{ } ou \text{ } (2+3x \leq \text{ } et \text{ } 5-2x < 0) \\ &\Longleftrightarrow \left(x \geq -\frac{2}{3} \text{ } et \text{ } x < \frac{5}{2}\right) \text{ } ou \text{ } \left(x \leq -\frac{2}{3} \text{ } et \text{ } x > \frac{5}{2}\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[\end{aligned}$$

donc

$$D_h = \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[.$$

x	$-\infty$		-2/3		5/2		$+\infty$
$2+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$5-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
(2+3x) / (5-2x)		$-$	0	$+$	‖	$-$	

$*$ Démontrons par la définition de la limite : $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}(3x+1)=7$.
D'une manière générale, on a:
$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \alpha>0,\ \forall\, x\in D_f,\ \ |x-x_0|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$
Alors :
$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \alpha>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \ |x-2|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-7|<\varepsilon$

$$\begin{aligned}|f(x)-7|<\varepsilon &\Longleftrightarrow |(3x+1)-7|<\varepsilon\\ &\Longleftrightarrow |3x-6|<\varepsilon\\ &\Longleftrightarrow |3(x-2)|<\varepsilon\\ &\Longleftrightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

Donc
$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \alpha>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \ |x-2|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-7|<\varepsilon$
Tel que $\alpha=\dfrac{\varepsilon}{3}$.

Solution de L'exercice 3:
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} & si\ x\neq 0,\\ 1 & si\ x=0.\end{cases}$$

1. On a

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{>\\x\longrightarrow 0}} f(x)=\lim_{\substack{>\\x\longrightarrow 0}}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad (\ on\ a\ utilis\ une\ limite\ connue\ )\\ &\lim_{\substack{<\\x\longrightarrow 0}} f(x)=\lim_{\substack{<\\x\longrightarrow 0}}\left(-\frac{\sin x}{x}\right)=-1\end{aligned}$$

Donc la limite n'existe pas .
2. On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$ n'existe pas, ce qui signifie que la fonction n'est pas continue en 0
f n'est pas dérivable en 0, puisqu'elle n'est pas continue en ce point, car toute fonction dérivable est continue ce qui est équivalent à dire que toute fonction discontinue en un point ne peut être dérivable en ce point .

Solution de L'exercice 4:
1. La fonction est clairement cntinue pour $x\neq 0$. Pour $x=0$

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{>\\x\longrightarrow 0}} f(x)=\lim_{\substack{>\\x\longrightarrow 0}} x^3\cos\frac{1}{x}=0, \quad (\ on\ a\ utilis\ le\ thorme\ d'encadrement\ )\\ &\lim_{\substack{<\\x\longrightarrow 0}} f(x)=\lim_{\substack{<\\x\longrightarrow 0}} x^3\sin\frac{1}{x}=0, \quad (\ on\ a\ utilis\ le\ thorme\ d'encadrement\ )\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)=f(0)$: f est continue en 0.
2. Pour $x\neq 0$ la fonction est clairement dérivable et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\dfrac{1}{x} + x\sin\dfrac{1}{x} & si\ x > 0, \\ \\ 3x^2 \sin\dfrac{1}{x} - x\cos\dfrac{1}{x} & si\ x < 0. \end{cases}$$

La droite tangente à f en $x = x_0$ a équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ donc pour $x_0 = \dfrac{1}{\pi}$ on a $y = -\dfrac{3}{\pi^2}x + \dfrac{2}{\pi^3}$.

3. La fonction est dérivable en $x = 0$ si et seulement si la limite $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a une limite finie.

On a

$$\lim_{\substack{> \\ x\longrightarrow 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x\longrightarrow 0}} \frac{x^3 \cos\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$
$$\lim_{\substack{< \\ x\longrightarrow 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{< \\ x\longrightarrow 0}} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$

Donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$: f est dérivable en 0 et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\dfrac{1}{x} + x\sin\dfrac{1}{x} & si\ x > 0, \\ \\ 0, & si\ x = 0 \\ \\ 3x^2 \sin\dfrac{1}{x} - x\cos\dfrac{1}{x} & si\ x < 0. \end{cases}$$

4. f' est clairement continue pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ on a

$$\lim_{\substack{> \\ x\longrightarrow 0}} f'(x) = \lim_{\substack{> \\ x\longrightarrow 0}} \left(3x^2 \cos\frac{1}{x} + x\sin\frac{1}{x}\right) = 0,$$
$$\lim_{\substack{< \\ x\longrightarrow 0}} f'(x) = \lim_{\substack{< \\ x\longrightarrow 0}} \left(3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}\right) = 0$$

alors $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f'(x) = f'(0)$, donc f' est continue en 0. Par conséquent f est de classe $C^1(\mathbb{R})$.

Solution de L'exercice 5:

a)$f\ : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ (on a utilis le thorme dencadrement)

Donc le prolongement par continuité définie par $\tilde{f}\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \sin x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

b) $f\ : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la situation en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow 0} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - \ln\left(\dfrac{e^0 + e^{-0}}{2}\right)}{x - 0} \\ &= \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{e^0 + e^{-0}}\right) = 0\ car\ :\ \left(\ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}{\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

Donc le prolongement par continuité définie par $\tilde{f}\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

c) $f\ : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1 + x - 2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1 + x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{(1+x)}.$$

Donc f a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand x tend vers 1. Et donc en posant $f(1) = -\frac{1}{2}$, nous définissons une fonction continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. En -1 la fonction f n'est pas prolongeable par continuité car $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^{\pm}} f(x) = \mp\infty$.

Donc f n'admet pas un prolemngement par continuité sur $\mathbb{R}$.

Rappel :

THÉORÈME DE L'HÔPITAL

Theorem : *Soient f et g deux fonctions dérivables au voisinage de $x_0 \in]a,b[$.*

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ *où* A, B *sont tous les deux nuls ou tous les deux infinis,* $g'(x) \neq 0$ *pour* x *voisin de* x_0*, et si* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe alors:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1) Soient $f(x) = e^{2x} - 1$ et $g(x) = x$, alors $f'(x) = 2e^{2x}$ et $g'(x) = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{0}{0}, \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

Donc

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2.$$

2) Soient $f(x) = 1+\cos\pi x$ et $g(x) = x^2-2x+1$, alors $f'(x) = -\pi\sin\pi x$, $f''(x) = -\pi^2\cos\pi x$ et $g'(x) = 2x-2$, $g''(x) = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1} = \frac{0}{0}, \qquad \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{-\pi\sin\pi x}{2x-2} = \frac{0}{0},$$
$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{-\pi^2\cos\pi x}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Donc

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1} = \frac{\pi^2}{2}.$$

3) Soient $f(x) = \ln(\cos 3x)$ et $g(x) = \ln(\cos 2x)$, alors $f'(x) = -\dfrac{3\sin 3x}{\cos 3x}$ et $g'(x) = -\dfrac{2\sin 2x}{\cos 2x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)} = \frac{0}{0}, \quad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{3}{2} \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \times \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \\
&= \frac{3}{2}\left[\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\cos 3x} \times \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{3}{2}\right] \\
&= \frac{9}{4} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}
\end{aligned}$$

Fiche de TD 4

Solution de L'exercice 1:
1) $\cos(2x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi$.
En total on a quatre solutions $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{11\pi}{6}$.

2) Comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ l'équation $2\cos^2 x + 7\sin x = 5$ peut s'écrire comme $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$ qui est une équation du second degré.

3) En factorisant l'équation $(2\sin x - 1)(\sin x - 3) = 0$ alors $\sin x = 0.5$ et les solutions sont $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$.

Solution de L'exercice 2:
a) On sait que

$$\arcsin(\sin x) = x$$

si et seulement si x appartient à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. On cherche donc un x dans cet intervalle, tel que

$$\sin x = \sin \frac{18\pi}{5}.$$

Or

$$\frac{18\pi}{5} = \frac{20\pi - 2\pi}{5} = 4\pi - \frac{2\pi}{5}.$$

Comme $-\dfrac{2\pi}{5}$ appartient à $[-\pi/2, \pi/2]$, on aura donc

$$\arcsin\left(\sin \frac{18\pi}{5}\right) = -\frac{2\pi}{5}.$$

b) On peut utiliser la formule

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

On a alors

$$\arccos\left(\sin \frac{18\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin \frac{18\pi}{5}\right)$$

et d'après a)

$$\arccos\left(\sin \frac{18\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{9\pi}{10}.$$

On constate bien que ce résultat appartient à l'intervalle $[0, \pi]$.

c) On procède comme dans a)

$$\frac{15\pi}{7} = \frac{14\pi + \pi}{7} = 2\pi + \frac{\pi}{7},$$

donc

$$\arcsin\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}.$$

d) Le nombre $\frac{1}{3}$ étant compris entre -1 et 1, on a

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

e) le nombre $\frac{\pi}{2}$ étant réel, on a

$$\tan\left(\arctan\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Solution de L'exercice 3:

a) $\forall\, x \in [-1,1]\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
$\forall\, x \in [-1,1]\ \sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$ donc $\sin(\arccos x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
Mais comme $\arccos(x) \in [0,\pi]$ alors $\sin(\arccos x) \geq 0$ donc $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.

b)$\forall\, x \in [-1,1]\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
$\forall\, x \in [-1,1]\ \cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2$ donc $\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$.
Mais comme $\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ alors $\cos(\arcsin x) \geq 0$ donc $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

c) $\forall\, x \in [-1,1]$ on a : $0 \leq \arccos x \leq \pi$ donc $-\pi \leq -\arccos x \leq 0$ alors $0 \leq \pi - \arccos x \leq \pi$.
Rappelons que $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ donc $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$.
Il résulte que $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ autrement $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$.
Rappel :

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et } \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall\, x \in\,]-1,1[.}$$

d) Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ alors $f'(x) = 0$ pour $x \in]-1,1[$ donc f est une fonction constante sur $[-1,1]$ Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ donc pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$.

Rappel :

$$\boxed{\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta \text{ et } \sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta}$$

a) $\cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1.$
b) $\cos(2\arcsin x) = 1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 1 - 2x^2.$
c) $\sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$

3) Soit $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$, la fonction est définie sur $\mathbb{R}^*$.

On a $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$ donc g est constante sur chacun des ses intervalle de définition.

$g(x) = c_1$ sur $]-\infty, 0[$ et $g(x) = c_2$ sur $]0, +\infty[$. En calculant $g(1)$ et $g(-1)$ on obtient $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ et $c_2 = +\frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{g(x) = g(1) = \frac{\pi}{2},\ \forall\, x > 0 \text{ et } g(x) = g(-1) = -\frac{\pi}{2},\ \forall\, x < 0.}$$

Solution de L'exercice 4:

a) $\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13}$

$$\Longrightarrow \sin(\arcsin x) = \sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right)$$
$$\Longrightarrow x = \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right) + \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cdot\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)$$
$$\Longrightarrow x = \frac{4}{5}\times\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)} + \frac{15}{3}\times\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)}$$
$$\Longrightarrow x = \frac{4}{5}\times\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} + \frac{15}{3}\times\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}$$
$$\Longrightarrow x = \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\times\frac{3}{5} = \frac{48}{65} + \frac{3}{13} = \frac{63}{65} \in [-1, 1]$$

b) L'équation $(\arcsin x - 5)\arcsin x = -4$,
équivaut au système

$$\begin{cases} U = \arcsin x \\ \\ U^2 - 5U + 4 = 0 \end{cases}$$

L'équation du second degré a deux racines $U_1 = 1$ et $U_2 = 4$. Mais $\arcsin x$ étant compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, l'équation $\arcsin x = 4$ n'a pas de solution. Par contre l'équation $\arcsin x = 1$ a une solution $x = \sin 1$, qui est la seule solution de l'équation initiale.

c) $5\cosh x - 4\sinh x = 3$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow 5\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) - 4\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = 3 \\
&\Longrightarrow \frac{5}{2}e^x + \frac{5}{2}e^{-x} - 2e^x + 2e^{-x} = 3 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{2}e^x + \frac{9}{2}e^{-x} = 3 \Longrightarrow e^x + 9e^{-x} = 6 \\
&\Longrightarrow e^{2x} + 9 = 6e^x \Longrightarrow e^{2x} - 6e^x + 9 = 0.....(*)
\end{aligned}$$

Posons $t = e^x$, $(*)$ devient : $t^2 - 6t + 9 = 0$.
$\triangle = 0$, $t = 3 \Longrightarrow x = \ln(3)$.
Calculons les limites

a) En écrivant la fonction à l'aide des exponentielles, on obtient

$$2\cosh^2 x - \sinh 2x = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 1 + e^{-2x},$$

et ceci tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Alors

$$e^{2x}\left(2\cosh^2 x - \sinh 2x\right) = e^{2x} + 1,$$

et ceci tend vers 1 lorsque x tend vers $-\infty$.
$\star$ La fonction f est définie si

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1$$

Cette inéquation s'écrit

$$x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

ou encore

$$\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0.$$

Le domaine de définition est donc $]0,+\infty[$. En utilisant l'expression de argch sous forme de logarithme,

$$\begin{aligned}
\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] &= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}\right] \\
&= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\right] \\
&= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\left|x-\frac{1}{x}\right|\right].
\end{aligned}$$

Si $x \geq 1$, le nombre $x-\dfrac{1}{x}$ est positif ainsi que $\ln x$, et

$$\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln x = |\ln x|.$$

Si $0 < x \leq 1$, le nombre $x-\dfrac{1}{x}$ est négatif ainsi que $\ln x$, et

$$\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln\frac{1}{x} = -\ln x = |\ln x|,$$

donc, pour tout $x > 0$

$$\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = |\ln x|.$$

Fiche de TD 5

Solution de L'exercice 1:

$$
\begin{array}{rc|l}
 & 1 & 1+x-x^2 \\
- & 1+x-x^2 & 1-x+2x^2-3x^3+5x^4 \\
\cline{2-2}
 & -x+x^2 & \\
- & -x-x^2+x^3 & \\
\cline{2-2}
 & 2x^2-x^3 & \\
- & 2x^2+2x^3-2x^4 & \\
\cline{2-2}
 & -3x^3+2x^4 & \\
- & -3x^3-3x^4+3x^5 & \\
\cline{2-2}
 & 5x^4-3x^5 &
\end{array}
$$

d'où

$$\frac{1}{1+x-x^2} = 1-x+2x^2-3x^3+5x^4+\circ(x^4).$$

où $\quad \circ(x^4) = x^4\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\longrightarrow 0}\varepsilon(x)=0$

2) On sait que $\quad e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\circ(x^5)$
alors

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\circ(x^5)} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+\circ(x^4)}$$

par la division euclidienne suivant les puissances croissantes on obtient

$$
\begin{array}{rc|l}
 & 1 & 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120} \\
- & 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120} & \quad 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720} \\
\cline{2-2}
 & -\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{120} & \\
- & -\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}-\frac{x^4}{48} & \\
\cline{2-2}
 & \frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{80} & \\
- & \frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{72} & \\
\cline{2-2}
 & -\frac{x^4}{720} &
\end{array}
$$

d'où

$$\frac{x}{e^x-1} = 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\circ(x^4)$$

3) On sait que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$ DL à l'ordre 4 au voiinage de 0
par la division euclidienne suivant les puissances croissantes on obtient

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \circ(x^4)$$

autre Méthode
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4) = 1 + u$ en posant $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$
Nous aurons besoin de $u^2 = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon(x)$.
(On note abusivement $\varepsilon(x)$ pour différents restes.)
Ainsi
$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^2\varepsilon(u) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \circ(x^4)$
4) On sait que $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\frac{1}{2}x^2 + \circ(x^2)$
d'où
$\sqrt[3]{1+x^2} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\frac{1}{2}x^4 + \circ(x^4) = 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + \circ(x^4)$

$$\begin{array}{rr|l}
 & 1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\
- & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} & 1 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{19}{72}x^4 \\
\hline
 & \frac{5}{6}x^2 - \frac{11}{72}x^4 & \\
- & \frac{5}{6}x^2 - \frac{5}{12}x^4 & \\
\hline
 & \frac{19}{72}x^4 &
\end{array}$$

d'où

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\cos x} = 1 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{19}{72}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

autre Méthode (conserver seulement les monômes de degré ≤ 4)

$$\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\cos x} = \sqrt[3]{1+x^2} \times \frac{1}{\cos x} = \left(1 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + x^4\varepsilon_1(x)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + x^4\varepsilon_2(x)\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{9}x^4 + x^4\varepsilon(x) = 1 + \frac{5}{6}x^2 + \frac{19}{72}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

5) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + 0x^4 + \circ(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)}$ par la division euclidienne suivant les puissances croissantes on obtient

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x - \frac{x^3}{6} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\
- & x - \frac{x^3}{2} & \quad x + \frac{x^3}{3} \\
\hline
 & \frac{1}{3}x^3 & \\
- & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^5 & \\
\hline
 & \frac{1}{6}x^5 &
\end{array}
$$

d'où $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^4)$

Solution de L'exercice 2:

1) On sait $\cos x = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$

$\cos x \times \sqrt{x+1} = \left(1 - \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)\right) \times \left(1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)\right)$ conserver seulement les monômes de degré ≤ 2

d'où

$$
\begin{aligned}
\cos x \times \sqrt{x+1} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x}{(1+x)^3} &= e^x\,(1+x)^{-3} \\
&= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x)\right)\left(1 - 3x + 6x^2 + x^2\varepsilon_2(x)\right) \\
&= 1 - 3x + 6x^2 + x - 3x^2 + x^2\varepsilon(x) \\
&= 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

3)

$$
\begin{aligned}
\cosh x \ln(1+x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_1(x)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)\right) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)
\end{aligned}
$$

On sait $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$ par la division euclidienne suivant les puissances croissantes on obtient

$$\begin{array}{rr|l} & x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 & 1 - \frac{x^2}{2} \\ - & x - \frac{1}{2}x^3 & x - \frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^3 \\ \hline & -\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 & \\ - & -\frac{1}{2}x^2 & \\ \hline & \frac{4}{3}x^3 & \end{array}$$

d'où $\dfrac{\cosh x \ln(1+x)}{\cos x} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4}{3}x^3 + \circ(x^3)$

Solution de L'exercice 3:

1) On pose $h = x - 2$, alors $x = h + 2$ et on a $\sqrt{x} = \sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \dfrac{h}{2}}$.

On se rappelle que, pour $u \to 0$, on peut écrire $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \dfrac{u^3}{16} + \circ(u^3)$; ici $u = \dfrac{h}{2}$ donc

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = \sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}} &= \sqrt{2}\sqrt{1+u} \\ &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + \circ(u^3)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{32} + \frac{h^3}{16} + \circ(h^3)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{(x-2)}{4} - \frac{(x-2)^2}{32} + \frac{(x-2)^3}{128} + \circ((x-2)^3)\right) \end{aligned}$$

2) On pose $y = x - 1$. Alors $\dfrac{\ln x}{(1+x)^2} = \dfrac{\ln(1+y)}{(y+2)^2}$. Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} y = 0$, on calcul le développement limité de $\dfrac{\ln(1+y)}{(y+2)^2}$, en zéro. Or ,

$\ln(1+y) = y - \dfrac{1}{2}y^2 + \circ(y^2)$,

$(2+y)^{-2} = \dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{y}{2}\right)^{-2} = \dfrac{1}{4}\left(1 - 2\dfrac{y}{2} + \dfrac{(-2)(-2-1)}{2}\dfrac{y^2}{2^2} + \circ(y^2)\right) = \dfrac{1}{4}\left(1 - y + \dfrac{3}{4}y^2 + \circ(y^2)\right)$

d'où

$$\frac{\ln(1+y)}{(y+2)^2} = \left(y - \frac{1}{2}y^2 + \circ(y^2)\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}y + \frac{3}{16}y^2 + \circ(y^2)\right) = \frac{1}{4}y - \frac{3}{8}y^2 + \circ(y^2).$$

Donc finalement

$$\frac{\ln x}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)^2 + \circ((x-1)^2).$$

3) On pose $u = x - \dfrac{\pi}{3}$ alors $x = u + \dfrac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin\left(u + \frac{\pi}{3}\right) = \sin u \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos u \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sin u + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u \\
&= \frac{1}{2}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \circ(u^3)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{u^2}{2} + \circ(u^3)\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + \circ(u^3) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \circ\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

autre méthode

Pour calculer le développement limité de $\sin x$ en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3 on utilise la formule de Taylor :

$$f(x) \underset{a}{=} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^k).$$

Ici $n = 3$, $a = \frac{\pi}{3}$ et $f(x) = \sin x$ d'où

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(a) &= \frac{\sqrt{3}}{2}; \\
f'(x) &= \cos x, & f'(a) &= \frac{1}{2}; \\
f''(x) &= -\sin x, & f''(a) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(a) &= -\frac{1}{2};
\end{aligned}$$

donc

$$\sin x \underset{\pi/3}{=} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

4) On pose $u = \dfrac{1}{x}$, ainsi $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} u = 0$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} &= \sqrt{\frac{x+2}{x}} = \sqrt{1+\frac{2}{x}} = \sqrt{1+2u} \\ &= 1 + \frac{2u}{2} - \frac{(2u)^2}{8} + \frac{(2u)^3}{16} + \circ(u^3) \\ &= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + \circ(x^{-3})\end{aligned}$$

5) $e^{-\frac{2}{x}}$, $n = 3$, $x_0 = -\infty$

$$e^{-\frac{2}{x}} = e^{-t} = e^{y} = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \circ(y^3) = 1 - t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \circ(t^3) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{3x^3} + \circ\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Solution de L'exercice 4:

a) On a

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \circ(x^4),$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4).$$

Donc

$$e^{x^2} - \cos x = \frac{3}{2}x^2 + \circ(x^2)$$

et par suite

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

b) On a

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4),$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \circ(x^4).$$

Donc

$$\cos x - \sqrt{1-x^2} = \frac{x^4}{6} + \circ(x^4)$$

et par suite

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

c) On pose $y = x - 1$, alors

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} = \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{(1+y)\ln(1+y)}{y(2+y)} = \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{(1+y)\left(y - \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{y^3}{3} + \circ(y^3)\right)}{y(2+y)}$$

$$= \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{1 + \dfrac{y}{2} - \dfrac{y^2}{6} + \circ(y^2)}{2\left(1 + \dfrac{y}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

$d)$ $$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x = \lim_{u \longrightarrow 0} (1+7u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{u \longrightarrow 0} exp\left(\frac{\ln(1+7u)}{u}\right) = \lim_{v \longrightarrow 0} exp\left(\frac{7\ln(1+v)}{v}\right)$$

$$= \lim_{v \longrightarrow 0} exp\left(\frac{7\left(v - \dfrac{v^2}{2} + \circ(v^2)\right)}{v}\right) = \lim_{v \longrightarrow 0} exp\left(7\left[1 - \frac{v}{2} + \circ(v)\right]\right) = e^7.$$